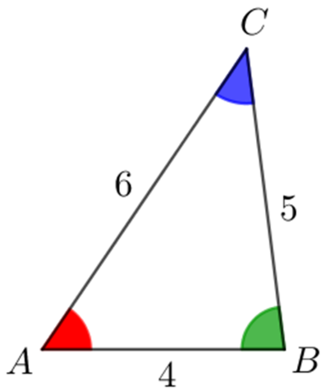
Défis Première Spé maths : produit scalaire Thiaude P.

Défi PRODSCAL 01 Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré :



Corrigé

D'après la formule du produit scalaire dans un triangle, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - BC^2] = \frac{1}{2}[4^2 + 6^2 - 5^2] = \frac{27}{2}$$

En utilisant à présent la définition du produit scalaire, on obtient :

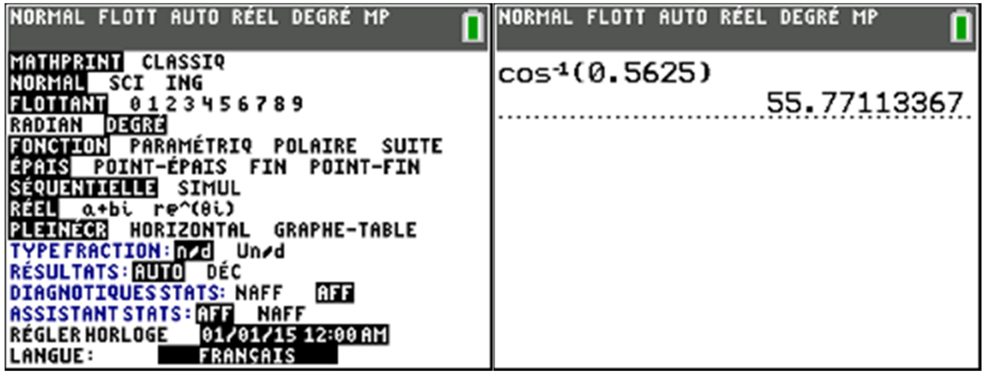
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC} = 4 \times 6 \times \cos\widehat{BAC} = 24 \times \cos\widehat{BAC}$$

Donc :

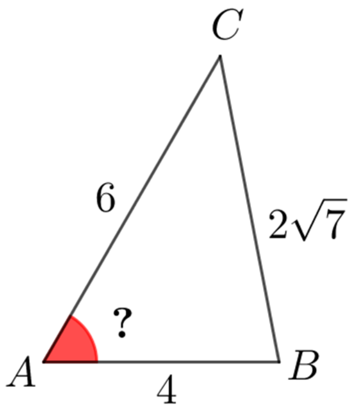
$$24 \times \cos\widehat{BAC} = \frac{27}{2}$$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\frac{27}{2}}{24} = \frac{27}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{9 \times 3}{2 \times 8 \times 3} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

Avec la calculatrice, la **mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est environ $56°$ arrondi au degré**.



Défi PRODSCAL 02 Déterminer la valeur exacte de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$:



Corrigé

D'après la formule du produit scalaire dans un triangle, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - BC^2] = \frac{1}{2}\left[4^2 + 6^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}[16 + 36 - 28] = 12$$

En utilisant à présent la définition du produit scalaire, on obtient :

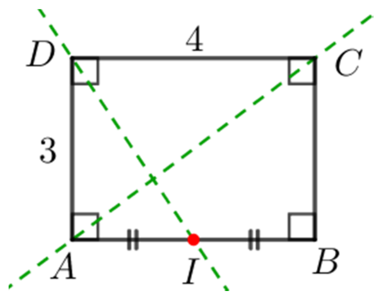
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC} = 4 \times 6 \times \cos\widehat{BAC} = 24 \times \cos\widehat{BAC}$$

Donc :

$$24 \times \cos\widehat{BAC} = 12 \Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Or, l'unique réel x compris entre 0 et π tel que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ est $\frac{\pi}{3}$ donc l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $60°$. **L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $60°$.**

Défi PRODSCAL 03 Les droites (AC) et (DI) sont-elles perpendiculaires ?



Corrigé

On pose $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et on munit le plan du repère orthonormé $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On a alors : $A(0;0)$, $C(4;3)$, $D(0;3)$, $I(2;0)$.

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} x_I - x_D \\ y_I - y_D \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-3 \end{pmatrix}$$

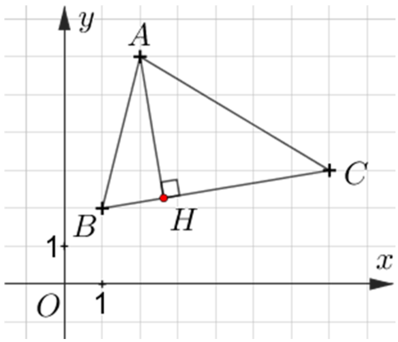
$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé :

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DI} = x_{\overrightarrow{AC}} \times x_{\overrightarrow{DI}} + y_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{DI}} = 4\times 2 + 3\times(-3) = 8 - 9 = -1$$

On constate que : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DI} \neq 0$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DI}$ ne sont pas orthogonaux, par conséquent $(\boldsymbol{AC})$ **et** $(\boldsymbol{DI})$ **<u>ne sont pas</u> perpendiculaires**.

Défi PRODSCAL 04 Dans un repère orthonormé on donne : $A(2;6)$, $B(1;2)$ et $C(7;3)$, on note $H(x_H; y_H)$ le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC :



1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$.
2. Que dire de $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$? En déduire que : $6x_H + y_H = 18$.
3. Que dire de $\det(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC})$? En déduire que : $x_H - 6y_H = -11$.
4. Déterminer les coordonnées de H.

Corrigé

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$.

   On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$, or $B(1;2)$ et $C(7;3)$, donc : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 7-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

2. **Que dire de $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$? En déduire que : $6x_H + y_H = 18$.**

   On a : $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, donc : $\overrightarrow{\boldsymbol{AH}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \mathbf{0}$. En utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé, on obtient : $x_{\overrightarrow{AH}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AH}} \times y_{\overrightarrow{BC}} = 0$

   Or $A(2;6)$ et $H(x_H; y_H)$ donc $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - 2 \\ y_H - 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :

   $$(x_H - 2)(6) + (y_H - 6)(1) = 0 \Leftrightarrow 6x_H - 12 + y_H - 6 = 0$$
   $$\Leftrightarrow 6x_H + y_H - 18 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{6x_H + y_H = 18}$$

3. **Que dire de $\det(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC})$? En déduire que : $x_H - 6y_H = -11$.**

   $H \in (BC)$ donc $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, par conséquent $\det(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

   Or, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H - 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc :

   $$\begin{vmatrix} x_H - 1 & 6 \\ y_H - 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x_H - 1)(1) - 6(y_H - 2) = 0$$
   $$\Leftrightarrow x_H - 1 - 6y_H + 12 = 0 \Leftrightarrow x_H - 6y_H + 11 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x_H - 6y_H = -11}$$

   Déterminer les coordonnées de H.

   D'après les deux questions précédentes, les coordonnées de H sont solutions du système : $\begin{cases} 6x + y = 18 \\ x - 6y = -11 \end{cases}$. On a les équivalences :

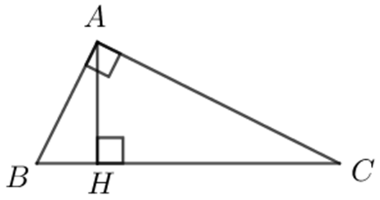
   $$\begin{cases} 6x + y = 18 \\ x - 6y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - 6x \\ x - 6y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - 6x \\ x - 6(18 - 6x) = -11 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - 6x \\ x - 108 + 36x = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 - 6x \\ 37x = 97 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{97}{37} \\ y = 16 - 6 \times \frac{97}{37} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{97}{37} \\ y = \frac{84}{37} \end{cases}$$

   On a donc :

   $$\boldsymbol{H\left(\frac{97}{37}; \frac{84}{37}\right)}$$

Défi PRODSCAL 05 **Un grand classique**

On se donne une unité de distance. Soit ABC un triangle rectangle en A, H le projeté orthogonal de A sur (BC) :



Comparer AH^2 et $HB \times HC$.

Corrigé

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, on a les équivalences :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = 0 \ \ (Chasles)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0 \ \ (*) \ (bilinéarité)$$

Or,

$\overrightarrow{AH}^2 = AH^2$, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HC}$ donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$, $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$,

$\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires de sens contraires donc

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -\left\|\overrightarrow{HB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{HC}\right\| = -HB \times HC$$

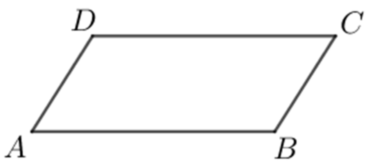
donc l'égalité $(*)$ s'écrit :

$$AH^2 + 0 + 0 - HB \times HC = 0 \Leftrightarrow AH^2 = HB \times HC$$

Conclusion : $AH^2 = HB \times HC$.

Défi PRODSCAL 06 **Un grand classique**

On se donne une unité de distance. Soit $ABCD$ un parallélogramme :



Comparer les deux nombres : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$
et $AC^2 + BD^2$.

Autrement dit comparer la somme des carrés des côtés du parallélogramme et la somme des carrés de ses diagonales.

Corrigé

$AC^2 + BD^2$
$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$
$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)^2$ (Chasles)
$= AB^2 + BC^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + BC^2 + CD^2 + 2\,\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$ (bilinéarité)
$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$
$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD})$
$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$
$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$ $(*)$

Or, $ABCD$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
$(*)$ devient donc :

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \vec{0}$
$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

On a donc finalement : $\boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{BC}^2 + \boldsymbol{CD}^2 + \boldsymbol{DA}^2 = \boldsymbol{AC}^2 + \boldsymbol{BD}^2$.